

Filterschaltungen

1. Aufgabe – Passive Filterschaltungen

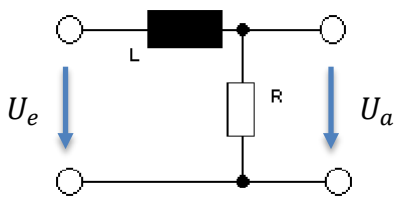
- i) Geben Sie die Übertragungsfunktion folgender Filterschaltungen an: $H(j\omega) = \frac{U_a(j\omega)}{U_e(j\omega)}$
- ii) Skizzieren Sie jeweils das idealisierte (bzgl. $|H(j\omega)|$) Bode Diagramm mit $|H(j\omega)|$ und $\varphi(j\omega)$.

Hinweise: Berechnen Sie für die Schaltungen A und B auch den Abfall an der Grenzfrequenz und zeichnen Sie diesen ein. Für die Schaltungen C und D können Sie denn Verlauf stark vereinfachen, indem Sie nur die Grenzwerte und zusätzlich ein Extremum betrachten.

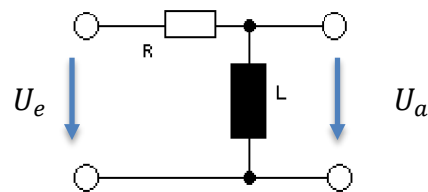
- iii) Wie nennt man diese Schaltung?

(Geben Sie soweit einfach möglich, die äquivalente RC-Schaltung an: Schaltung und H .)

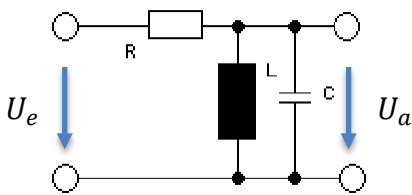
A)



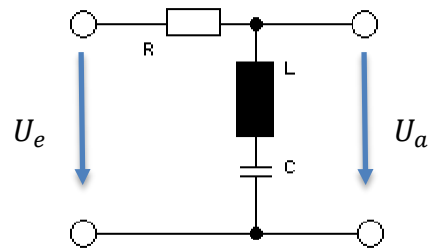
B)



C)



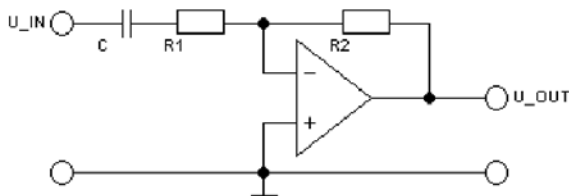
D)



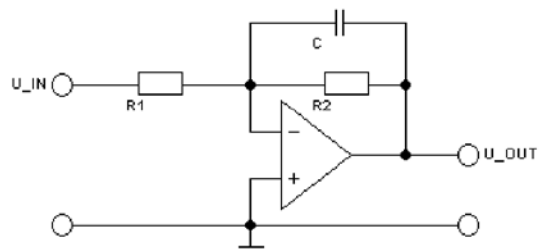
2. Aufgabe – Aktive Filterschaltungen

- i) Geben Sie die Übertragungsfunktion folgender Filterschaltungen an
- ii) Skizzieren Sie das (idealisierte) Bode Diagramm.
- iii) Wie nennt man diese Schaltung?

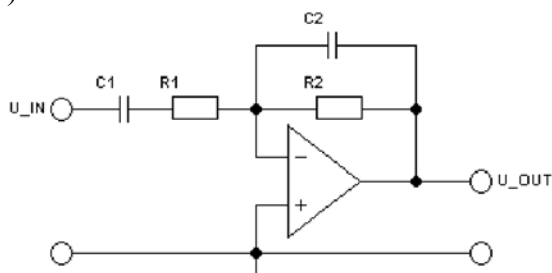
A)



B)



C)



Lösungen zu SUM Übungsblatt 3 Filterschaltungen

1. Aufgabe – Passive Filterschaltungen

A)

i) Für Spule gilt: $Z_L = j\omega L$. Ansatz „Spannungsteiler“ mit L und R:

$$U_a = U_e \cdot \frac{R}{R+j\omega L} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{R}{R+j\omega L} = \frac{1}{1+j\omega \frac{L}{R}} = \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

mit der Zeitkonstante $\tau = \frac{L}{R}$

ii) Berechnung von $|H(j\omega)|$ und $\varphi(j\omega)$:

Zunächst allgemeine Nebenrechnung mit $a = \omega\tau$:

$$\left| \frac{1}{1+ja} \right| = \left| \frac{1-ja}{(1+ja)(1-ja)} \right| = \left| \frac{1-ja}{1+a^2} \right| = \sqrt{\frac{1^2}{(1+a^2)^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^2}} = \sqrt{\frac{1+a^2}{(1+a^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\Rightarrow |H(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+j\omega \frac{L}{R}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega \frac{L}{R})^2}}$$

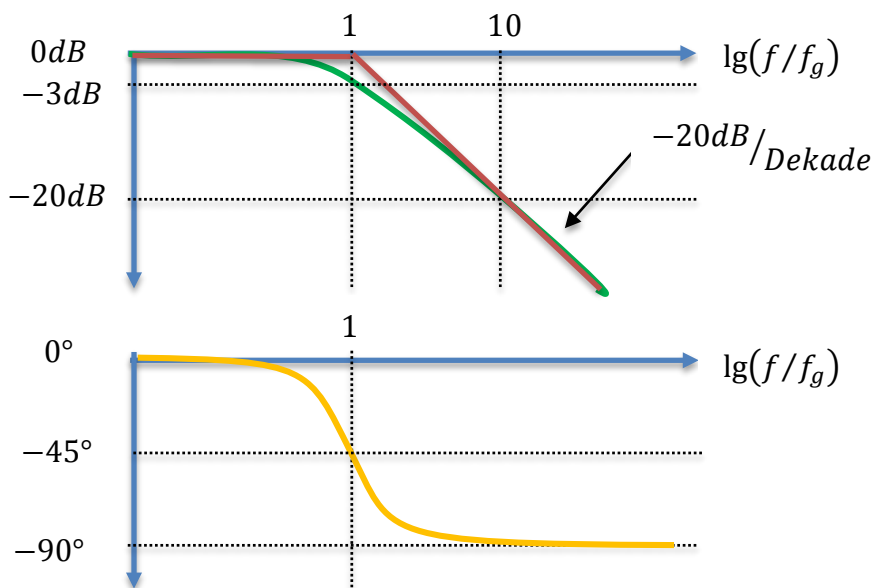
Mit Real- $\frac{1}{1+a^2}$ und Imaginärteil $\frac{-a}{1+a^2}$ (siehe Nebenrechnung):

$$\Rightarrow \varphi(j\omega) = \text{atan} \left(\frac{\text{Im}(H)}{\text{Re}(H)} \right) = \text{atan} \left(-\omega \frac{L}{R} \right)$$

Und: $\omega = 0 \Rightarrow \varphi = 0^\circ$; $\omega = \omega_g = \frac{R}{L} \Rightarrow \varphi = -45^\circ$; $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi = -90^\circ$;

Skizze Bode-Diagramm mit wesentlichen Elementen:

Idealer Verlauf (rot) / Verlauf mit 3dB Abfall (Grün) / Phase (orange)



Berechnung 3dB Abfalls: wo ist $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$?

(Wegen $10^{-3\text{dB}/20\text{dB}} \cong \frac{1}{\sqrt{2}}$ siehe Definition dB)

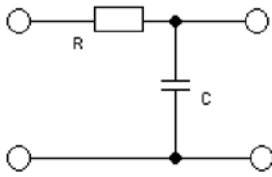
$$|H(j\omega_g)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_g \frac{L}{R})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \omega_g \frac{L}{R} = 1 \Leftrightarrow \omega_g = \frac{R}{L} = \frac{1}{\tau}$$

Außerdem gilt: $\omega_g = 2\pi f_g \Leftrightarrow f_g = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L}$

(z.B. für nachfolgende Simulationen: $f_g = \frac{1}{2\pi} \frac{1\text{k}\Omega}{10\text{mH}} = \frac{1}{2\pi} \frac{10^3\Omega}{10^{-2}\text{H}} = \frac{1}{2\pi} 10^5\text{Hz} = 15,9\text{kHz}$)

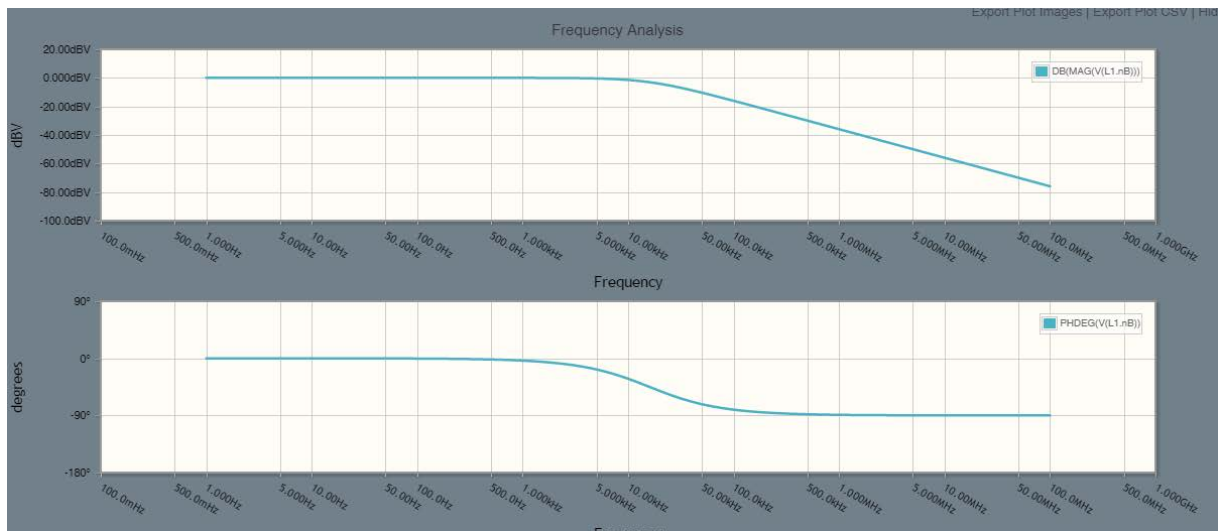
iii)

Diese Schaltung ist ein Tiefpass. Die äquivalente RC-Schaltung sieht so aus:



Und hat folgende Übertragungsfunktion: $H(j\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1+j\omega RC}$

Simuliertes Bode-Diagramm mit z.B. $R = 1k\Omega$ und $L = 10mH$



B) Äquivalentes Vorgehen wie bei A)

i) Ansatz „Spannungsteiler“ mit L und R:

$$U_a = U_e \cdot \frac{j\omega L}{R+j\omega L} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{j\omega L}{R+j\omega L} = \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1+j\omega \frac{L}{R}} = \frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau} \quad (S. u. = \frac{1}{1-j\frac{1}{\omega\tau}})$$

mit der Zeitkonstante $\tau = \frac{L}{R}$

ii) Berechnung von $|H(j\omega)|$ und $\varphi(j\omega)$:

Zunächst allgemeine Nebenrechnung mit $a = \frac{1}{\omega\tau}$:

$$\left| \frac{1}{1-ja} \right| = \left| \frac{1+ja}{(1-ja)(1+ja)} \right| = \left| \frac{1+ja}{1+a^2} \right| = \sqrt{\frac{1^2}{(1+a^2)^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^2}} = \sqrt{\frac{1+a^2}{(1+a^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\Rightarrow |H(j\omega)| = \left| \frac{1}{1-j\frac{R}{\omega L}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}}$$

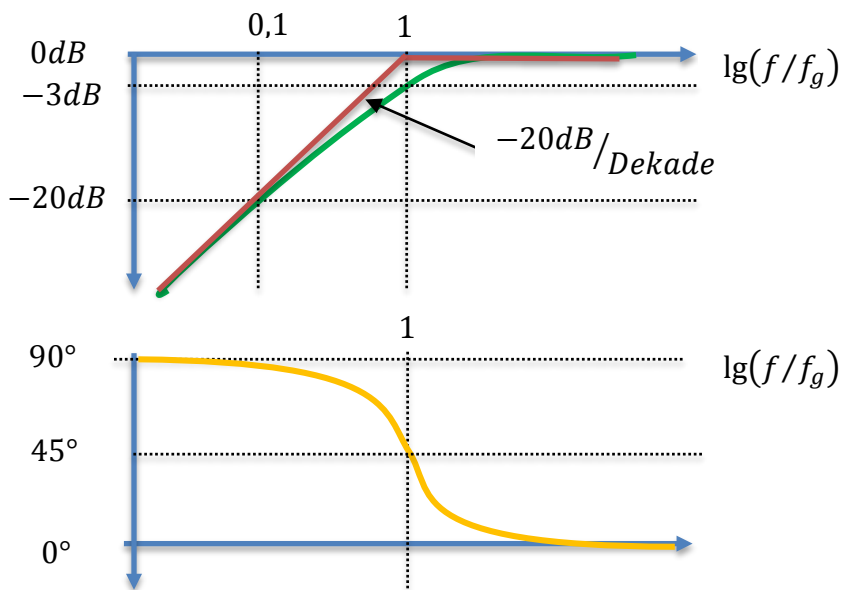
Mit Real- $\frac{1}{1+a^2}$ und Imaginärteil $\frac{a}{1+a^2}$ (siehe Nebenrechnung):

$$\Rightarrow \varphi(j\omega) = \text{atan}\left(\frac{\text{Im}(H)}{\text{Re}(H)}\right) = \text{atan}\left(\frac{R}{\omega L}\right)$$

$$\Rightarrow \omega = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ; \omega = \omega_g = \frac{R}{L} \Rightarrow \varphi = 45^\circ; \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi = 0^\circ;$$

Skizze Bode-Diagramm mit wesentlichen Elementen:

Idealer Verlauf (rot) / Verlauf mit 3dB Abfall (Grün) / Phase (orange)



Berechnung 3dB Abfalls (siehe A)

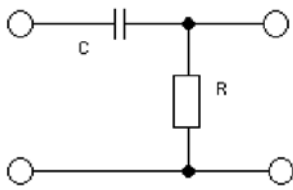
$$|H(j\omega_g)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{\omega_g L}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{R}{\omega_g L} = 1 \Leftrightarrow \omega_g = \frac{R}{L} = \frac{1}{\tau}$$

$$\text{Außerdem gilt: } \omega_g = 2\pi f_g \Leftrightarrow f_g = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L}$$

$$(z.B. \text{ für nachfolgende Simulationen: } f_g = \frac{1}{2\pi} \frac{1k\Omega}{10mH} = \frac{1}{2\pi} \frac{10^3\Omega}{10^{-2}H} = \frac{1}{2\pi} 10^5 Hz = 15,9kHz)$$

iii)

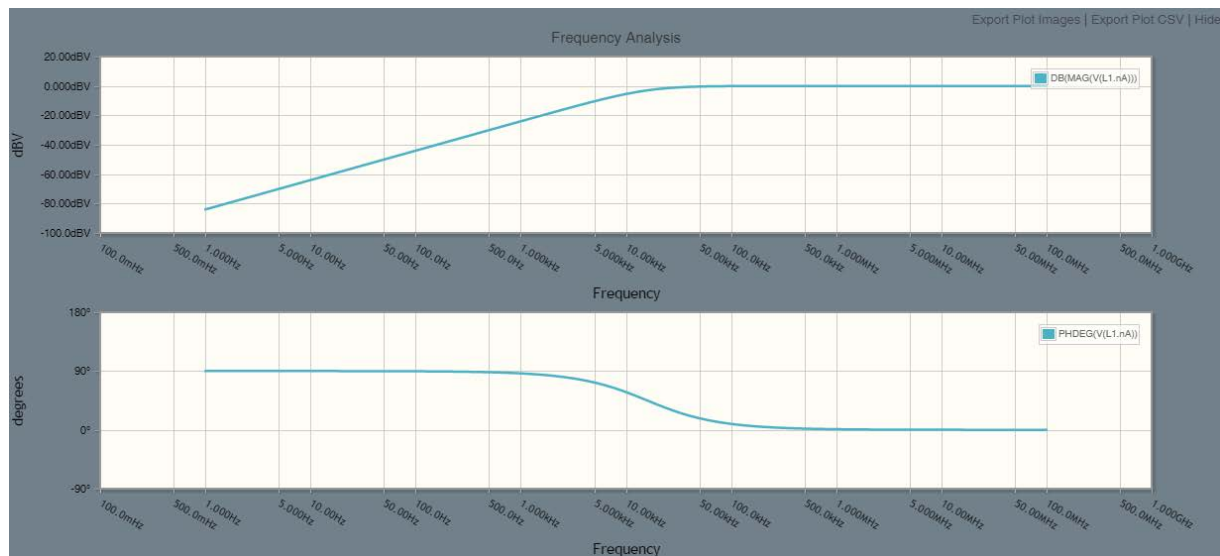
Diese Schaltung ist ein Hochpass. Die äquivalente RC-Schaltung sieht so aus:



Und hat folgende Übertragungsfunktion: $H(j\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$

Zur Erinnerung: $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ und Spannungsteileransatz machen.

Simuliertes Bode-Diagramm mit z.B. $R = 1k\Omega$ und $L = 10mH$



C) Äquivalentes Vorgehen wie bei A) jedoch zunächst die Parallelschaltung von L und C:

Zur Erinnerung: $Z_L = j\omega L$ und $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$

$$Z_{L||C} = \frac{Z_L \cdot Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{L}{C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

(Bemerkung: $\Rightarrow \omega \rightarrow 0 \Rightarrow Z_{L||C} = 0$; $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow Z_{L||C} = 0$;

i) Ansatz „Spannungsteiler“ mit R und $L||C$:

$$H(j\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{\frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}}{R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}} = \frac{1}{1 + R \cdot \frac{1 - \omega^2 LC}{j\omega L}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{j\omega L} - R \cdot \frac{\omega^2 LC}{j\omega L}} = \frac{1}{1 - j\left(\frac{R}{\omega L} - \omega RC\right)} = \frac{1}{1 + j\left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right)}$$

ii) Für das Bode-Diagramm, insgesamt 3 Fälle betrachten; zunächst die Grenzwerte:

Fall $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow$ Erster Imaginär-Term im Nenner $-j\frac{R}{\omega L}$ wird dominant

$$\Rightarrow H(j\omega) \rightarrow \frac{1}{-j\frac{R}{\omega L}} = j\frac{\omega L}{R}, \text{ d.h. die Phase dieser Zahl ist } \varphi = 90^\circ$$

und dann damit letztendlich $\Rightarrow |H(j\omega)| \rightarrow 0$

Fall $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow$ Zweiter Imaginär-Term im Nenner $+j\omega RC$ wird dominant

$$\Rightarrow H(j\omega) \rightarrow \frac{1}{+j\omega RC} = -j\frac{1}{\omega RC}, \text{ d.h. die Phase dieser Zahl ist } \varphi = -90^\circ$$

und dann damit letztendlich $\Rightarrow |H(j\omega)| \rightarrow 0$

Fall $|H(j\omega)|$ soll maximal werden. Die „Länge des Vektors“ H wird für eine bestimmte Frequenz (Resonanzfrequenz) maximal, wenn der Imaginärteil im Nenner verschwindet, d.h.

$$\frac{R}{\omega L} - \omega RC = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \omega^2 LC = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\text{Oder mit als Resonanzfrequenz} \quad f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Diese Gleichung nennt man auch die **Thomson'sche Schwingungsgleichung**.

Bei dieser Frequenz wird $H(j\omega_r) = 1 = 0dB$

Betrachtet man nochmals die Gleichung für $H(j\omega)$ jedoch zunächst ohne die 1 im Nenner wegzulassen, so erhält man für („in TP/HP-Gleichungsform bringen“):

$$\text{Falls } \omega \ll \omega_r \quad H(j\omega) \approx \frac{1}{1 - j\frac{R}{\omega L}} = \frac{j\frac{\omega L}{R}}{1 + j\frac{\omega L}{R}} \quad \Rightarrow \text{Hochpass mit } \tau = \frac{L}{R}, \text{ also } f_{HP} = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L}$$

$$\text{Falls } \omega \gg \omega_r \quad H(j\omega) \approx \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad \Rightarrow \text{Tiefpass mit } \tau = RC, \text{ also } f_{TP} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{RC}$$

Der genaue Verlauf der Kurve hängt also von der Kombination der Parameter ab. Eine Bestimmte Resonanzfrequenz f_r kann mittels verschiedener Werte von L und C erreicht werden. Nach der Wahl von R ergeben sich dann die Grenzwerte für den Hochpass und den Tiefpass die dann den Verlauf der Kurve bestimmen.

Die Phase lässt sich nicht ganz so leicht berechnen, uns soll bereits weiter oben untersuchte Grenzwertverhalten genügen.

Berechnung von $|H(j\omega)|$ und $\varphi(j\omega)$:

Zunächst allgemeine Nebenrechnung:

$$\left| \frac{1}{1-ja} \right| = \left| \frac{1+ja}{(1-ja)(1+ja)} \right| = \left| \frac{1+ja}{1+a^2} \right| = \sqrt{\frac{1^2}{(1+a^2)^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^2}} = \sqrt{\frac{1+a^2}{(1+a^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\Rightarrow |H(j\omega)| = \left| \frac{1}{1-j\frac{R}{\omega L}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}}$$

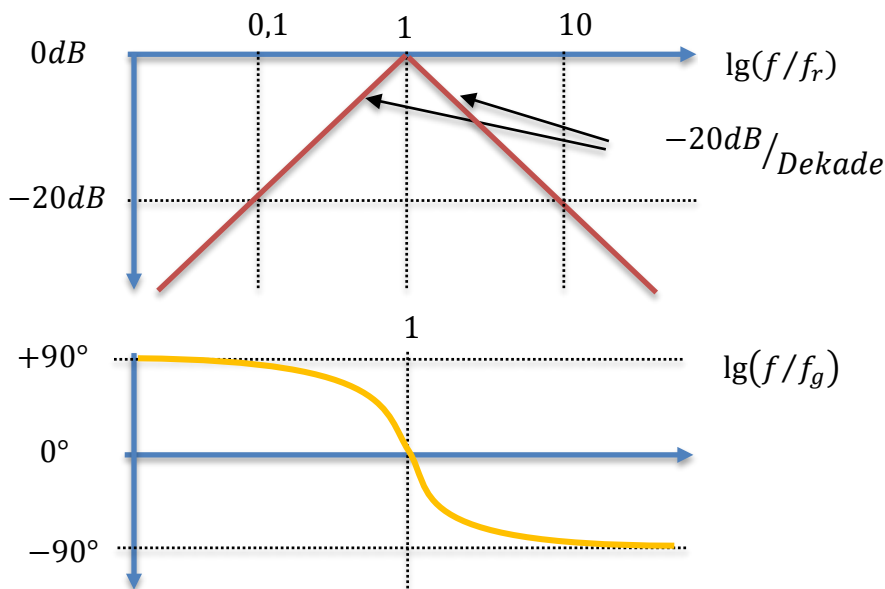
Mit Real- $\frac{1}{1+a^2}$ und Imaginärteil $\frac{a}{1+a^2}$ (siehe Nebenrechnung):

$$\Rightarrow \varphi(j\omega) = \text{atan}\left(\frac{\text{Im}(H)}{\text{Re}(H)}\right) = \text{atan}\left(\omega \frac{L}{R}\right)$$

Skizze Bode-Diagramm mit wesentlichen Elementen, unter der Annahme,

dass $f_r = f_{HP} = f_{TP}$ (wie sich einfach zeigen lässt, gilt dies für $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$)

Idealer Verlauf (rot) / Phase (orange)

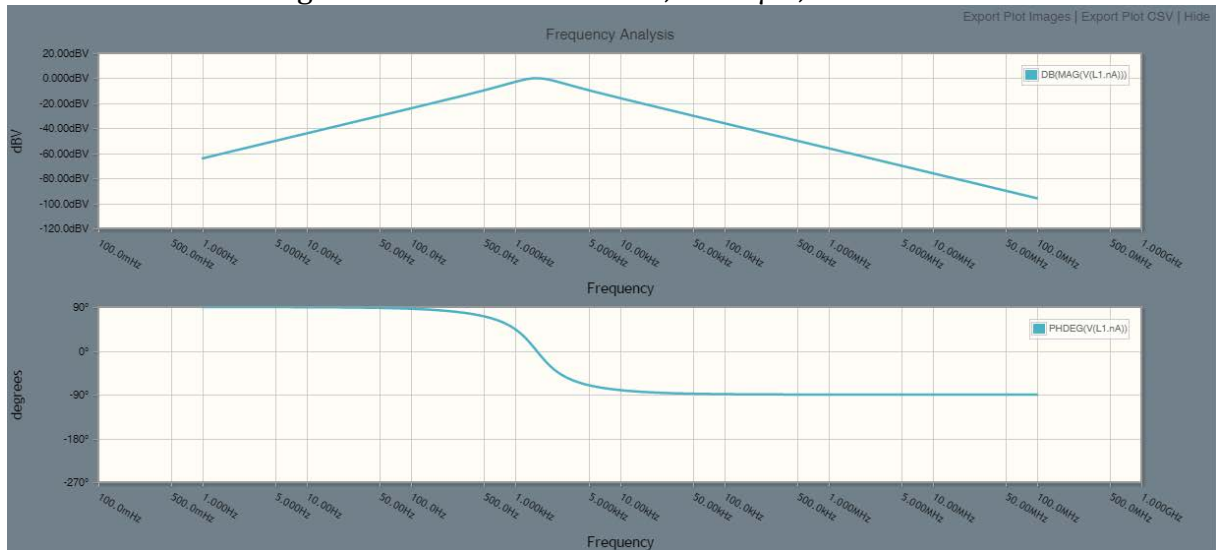


z.B. für nachfolgende Simulationen: $f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{10\text{mH} \cdot 1\mu\text{F}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{10^{-2}\text{H} \cdot 10^{-6}\text{F}}} = 1,59\text{kHz}$

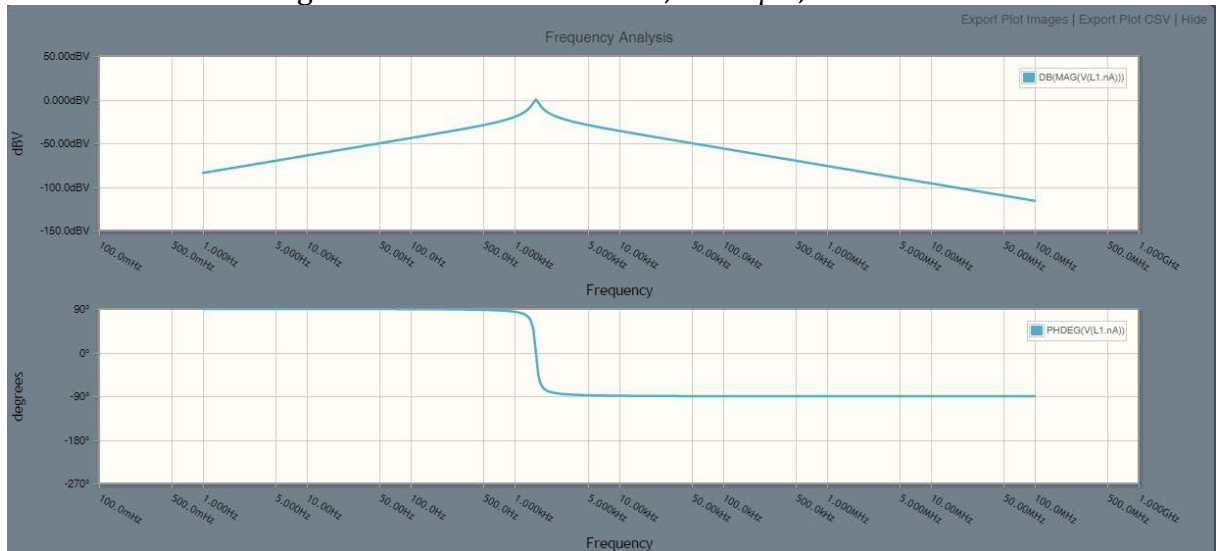
Variation mit $R = \sqrt{\frac{10\text{mH}}{1\mu\text{F}}} = \sqrt{\frac{10^{-2}\text{H}}{10^{-6}\text{F}}} = 100\Omega$; $R' = 10 * R$ und $R'' = 0,1 * R$

Berechnen Sie als Übung die f_{HP} und f_{HP} und sehen Sie sich die Simulationen an den entsprechenden Stellen an.

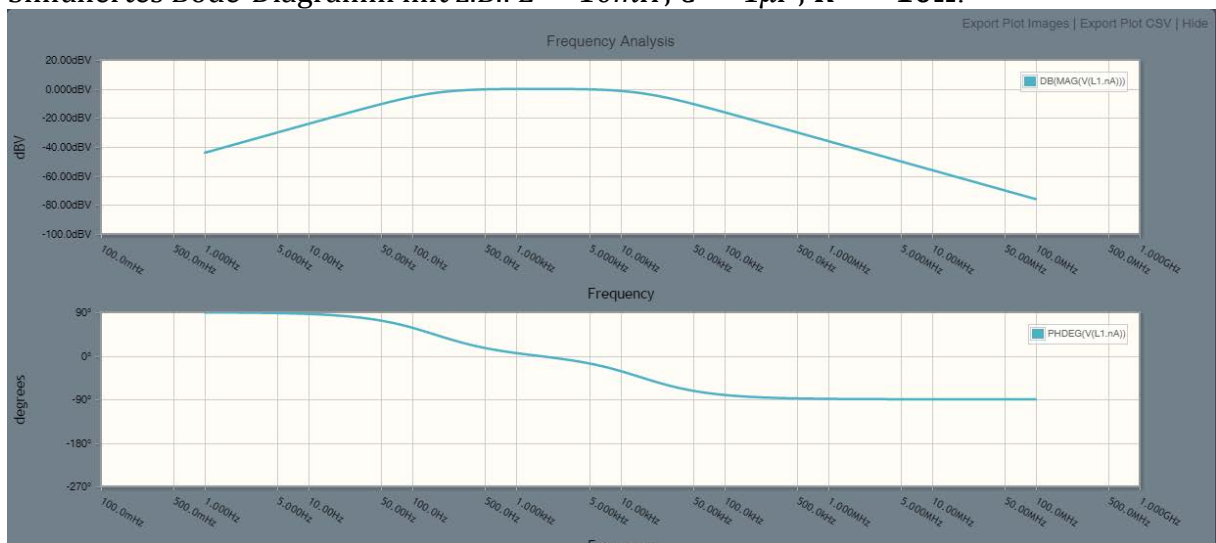
Simuliertes Bode-Diagramm mit z.B.: $L = 10\text{mH}$; $C = 1\mu\text{F}$; $R = 100\Omega$



Simuliertes Bode-Diagramm mit z.B.: $L = 10\text{mH}$; $C = 1\mu\text{F}$; $R' = 1\text{k}\Omega$:



Simuliertes Bode-Diagramm mit z.B.: $L = 10\text{mH}$; $C = 1\mu\text{F}$; $R'' = 10\Omega$:



D) Äquivalentes Vorgehen wie bei C) jedoch zunächst die Reihenschaltung von L und C:

Zur Erinnerung: $Z_L = j\omega L$ und $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$

$$Z_{L+C} = Z_L + Z_C = j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

(Bemerkung: $\Rightarrow \omega \rightarrow 0 \Rightarrow Z_{L+C} = \infty$; $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow Z_{L+C} = \infty$;

i) Ansatz „Spannungsteiler“ mit R und L+C:

$$H(j\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{\frac{1}{\omega C} - \omega L + jR} = \frac{\frac{1}{C} - \omega^2 L}{\frac{1}{C} - \omega^2 L + j\omega R} \quad (\text{jeweils mit } j \text{ bzw. } \omega \text{ erweitert})$$

ii) Für das Bode-Diagramm, insgesamt wieder 3 Fälle betrachten; zunächst die Grenzwerte:

Fall $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow H(j\omega) \rightarrow 1$ d.h. die Phase dieser Zahl ist $\varphi = 0^\circ$

Fall $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow H(j\omega) \rightarrow 1$, d.h. die Phase dieser Zahl ist $\varphi = 0^\circ$

Fall $|H(j\omega)|$ soll minimal werden – Der Zähler bzw. $H(j\omega)$ kann Null werden für:

$$\frac{1}{C} - \omega^2 L = 0 \Rightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\text{Oder mit als Resonanzfrequenz } f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Bei dieser Frequenz wird $H(j\omega_r) = 0 = -\infty \text{ dB}$

Auch hier kann man wieder die Gleichung für $H(j\omega)$ so betrachten, dass man einen der beiden Terme $j\omega L$ bzw. $\frac{1}{j\omega C}$ gedanklich weglässt. Man erhält dann („in TP/HP-Gleichungsform bringen“):

$$\text{Falls } \omega \ll \omega_r \quad H(j\omega) \approx \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR} \Rightarrow \text{Tiefpass mit } \tau = RC, \text{ also } f_{TP} = \frac{1}{2\pi RC}$$

$$\text{Falls } \omega \gg \omega_r \quad H(j\omega) \approx \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\frac{\omega L}{R}}{1 + j\frac{\omega L}{R}} \Rightarrow \text{Hochpass mit } \tau = \frac{L}{R}, \text{ also } f_{HP} = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L}$$

Der genaue Verlauf der Kurve hängt wieder von der Kombination der Parameter ab. Auch hier kann eine bestimmte Resonanzfrequenz f_r kann mittels verschiedener Werte von L und C erreicht werden. Nach der Wahl von R ergeben sich dann die Grenzwerte für den Hochpass und den Tiefpass die dann den Verlauf der Kurve bestimmen.

Für die Phase muss der Grenzwert für $\lim_{\omega \rightarrow \omega_r; \omega > \omega_r} H(j\omega)$ und $\lim_{\omega \rightarrow \omega_r; \omega < \omega_r} H(j\omega)$ untersucht werden.

Es gilt dabei (mit Substitutionen $a = \frac{1}{C} - \omega^2 L$ und $b = \omega R$ und Nenner reell machen):

$$H(j\omega) = \frac{a}{a + jb} = \frac{a(a - jb)}{(a + jb)(a - jb)} = \frac{a(a - jb)}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - jab}{a^2 + b^2}$$

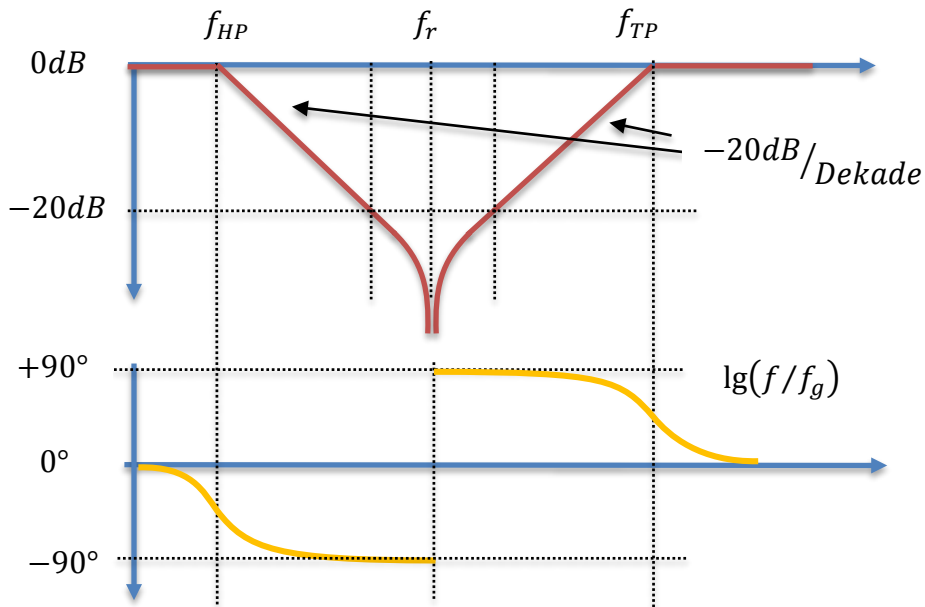
Der Realteil $\frac{a^2}{a^2 + b^2}$ ist real und positiv. Die Phase wird vom Imaginärteil $\frac{-jab}{a^2 + b^2}$ und damit von dessen Nenner bestimmt. Da $b = \omega R$ immer positiv

$$\omega > \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow a < 0 \Rightarrow \text{Imaginärteil} > 0, \text{ d.h. Phase } \varphi = +90^\circ$$

$$\omega < \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \text{Imaginärteil} < 0, \text{ d.h. Phase } \varphi = -90^\circ$$

D.h. es gibt einen Phasensprung bei $\omega = \omega_r$!

Skizze Bode-Diagramm mit wesentlichen Elementen, unter der Annahme, dass $f_{TP} < f_r < f_{HP}$
 Idealer Verlauf (rot) mit Singularität / Phase (orange)

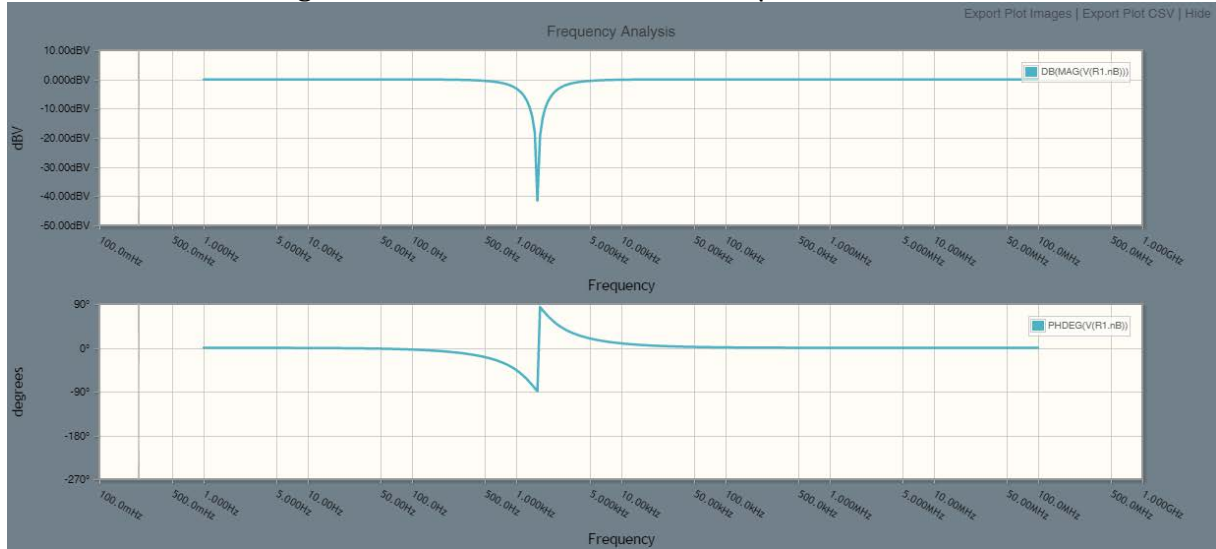


z.B. für nachfolgende Simulationen: $f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{10\text{mH} \cdot 1\mu\text{F}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{10^{-2}\text{H} \cdot 10^{-6}\text{F}}} = 1,59\text{kHz}$

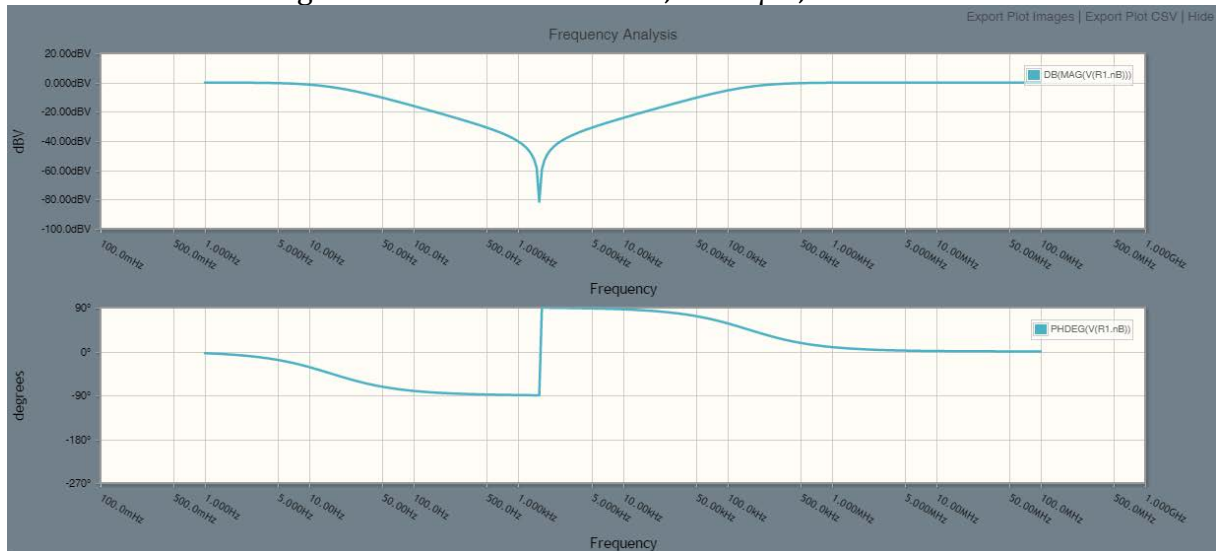
Variation mit $R = \sqrt{\frac{10\text{mH}}{1\mu\text{F}}} = \sqrt{\frac{10^{-2}\text{H}}{10^{-6}\text{F}}} = 100\Omega$; $R' = 100 * R$ und $R'' = 0,1 * R$

Berechnen Sie als Übung die f_{HP} und f_{TP} und sehen Sie sich die Simulationen an den entsprechenden Stellen an. Bei welchem Plot kann man diese sinnvoll ablesen?

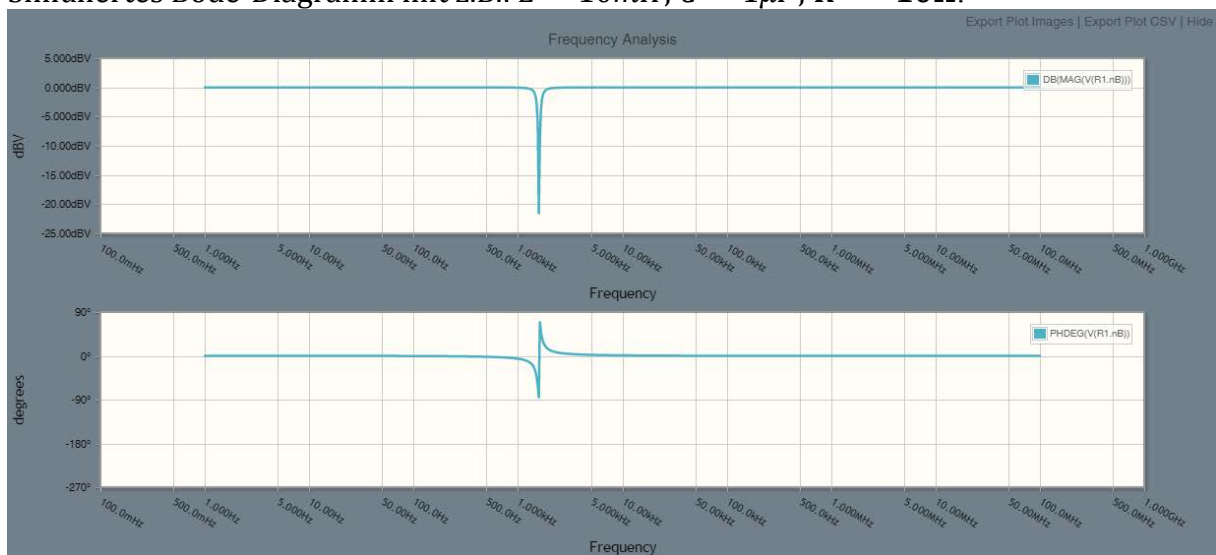
Simuliertes Bode-Diagramm mit z.B.: $L = 10\text{mH}$; $C = 1\mu\text{F}$; $R = 100\Omega$



Simuliertes Bode-Diagramm mit z.B.: $L = 10\text{mH}$; $C = 1\mu\text{F}$; $R' = 10\text{k}\Omega$:



Simuliertes Bode-Diagramm mit z.B.: $L = 10\text{mH}$; $C = 1\mu\text{F}$; $R'' = 10\Omega$:



2. Aufgabe – Aktive Filterschaltungen

A)

Invertierende Grundsaltung nur mit Widerständen: $v = \frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_2}{R_1}$

i) Hier ergibt sich demnach:

$$H(j\omega) = \frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega R_1 C}} = v \cdot \frac{j\omega R_1 C}{1 + j\omega R_1 C} = v \cdot \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = v \cdot \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega\tau}} = v \cdot H_{HP}$$

mit einem RC-Hochpass 1. Ordnung, wobei $\tau = R_1 C$

Äquivalentes Vorgehen wie bei Aufgabe 1A),

- jedoch ist die Phase wegen der invertierenden Grundsaltung um 180° verschoben,
- und außerdem ist für $R_1 \neq R_2$ der Wert von $H(j\omega)$ für $\omega \gg \omega_g$ nicht 0dB sondern

$$H_\infty = 20 \lg \left| -\frac{R_2}{R_1} \right|$$

ii) Berechnung für $R = R_1 = R_2$ von $|H(j\omega)|$ und $\varphi(j\omega)$:

Zunächst allgemeine Nebenrechnung (ähnlich bei 1A) mit $a = \frac{1}{\omega\tau}$:

$$\left| -\frac{1}{1-ja} \right| = \left| \frac{-1-ja}{(1-ja)(1+ja)} \right| = \left| \frac{-1-ja}{1+a^2} \right| = \sqrt{\frac{1^2}{(1+a^2)^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^2}} = \sqrt{\frac{1+a^2}{(1+a^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\Rightarrow |H(j\omega)| = \left| -\frac{1}{1-j\frac{1}{\omega RC}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(\omega RC)^2}}}$$

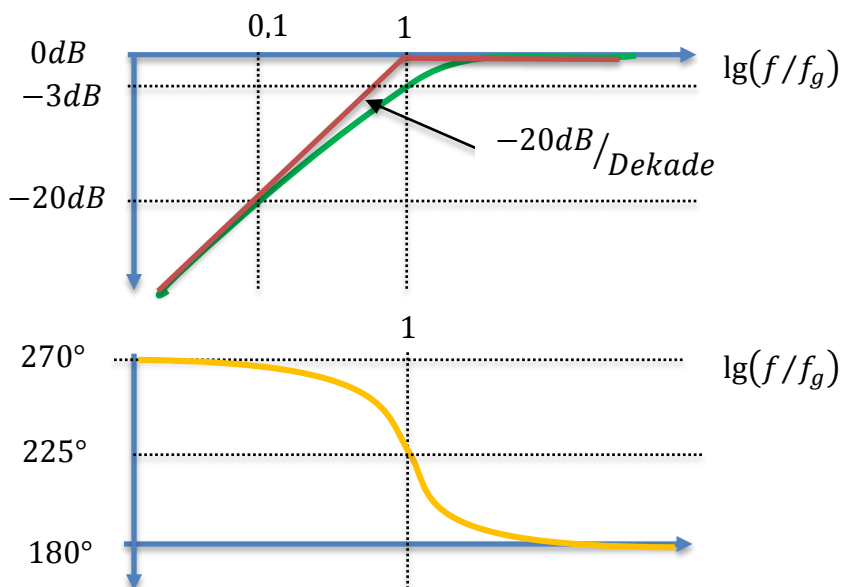
Mit Real- $\frac{-1}{1+a^2}$ und Imaginärteil $\frac{-a}{1+a^2}$ (siehe Nebenrechnung; Realteil negativ $\Rightarrow 180^\circ$ addieren):

$$\Rightarrow \varphi(j\omega) = \text{atan} \left(\frac{\text{Im}(H)}{\text{Re}(H)} \right) = \text{atan} \left(\frac{1}{\omega RC} \right) + 180^\circ$$

$$\Rightarrow \omega = 0 \Rightarrow \varphi = 270^\circ; \omega = \omega_g = \frac{1}{RC} \Rightarrow \varphi = 225^\circ; \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi = 180^\circ;$$

Skizze Bode-Diagramm für $R_1 = R_2$ mit wesentlichen Elementen:

Idealer Verlauf (rot) / Verlauf mit 3dB Abfall (Grün) / Phase (orange)



Berechnung 3dB Abfalls (siehe 1A)

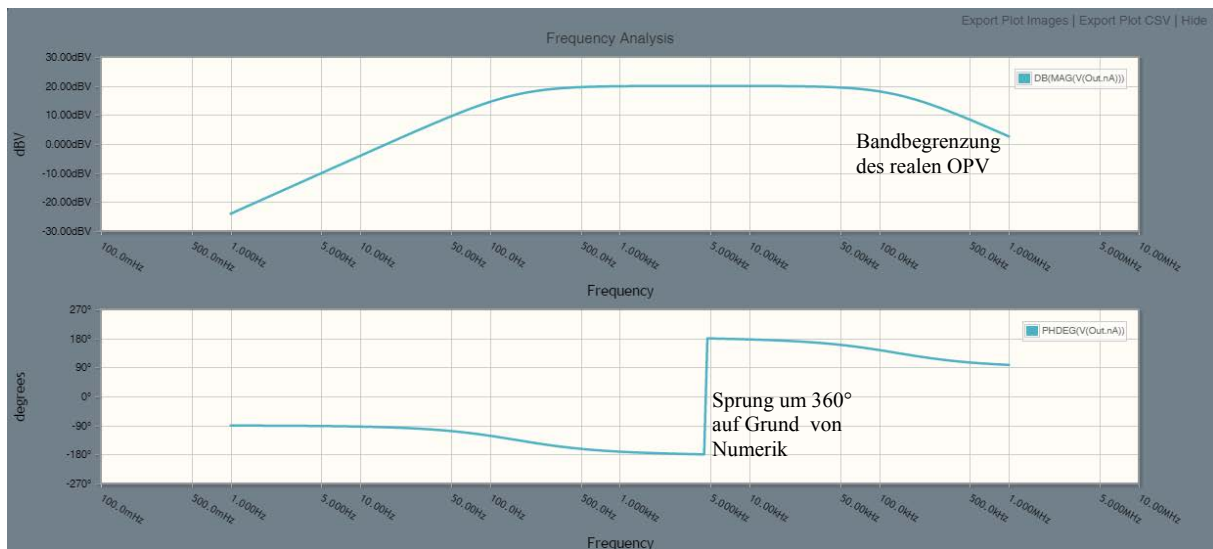
$$|H(j\omega_g)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_g RC}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_g RC = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_g = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$$

Außerdem gilt: $\omega_g = 2\pi f_g \Leftrightarrow f_g = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$

z.B. für nachfolgende Simulation: $R_1 = 10k\Omega$; $R_2 = 100k\Omega$; $C = 100nF$

$$\Rightarrow v = -\frac{R_2}{R_1} = -10 \Rightarrow +20\text{dB}$$

$$\Rightarrow f_g = \frac{1}{2\pi R_1 C} = \frac{1}{2\pi \cdot 10k\Omega \cdot 100nF} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^4 \Omega \cdot 10^{-7} F} = 159\text{Hz}$$



B)

i) Hier ergibt sich (entsprechend 2B) mit Parallelschaltung von $R_2 \parallel C$ und mit $v = -\frac{R_2}{R_1}$:

$$H(j\omega) = \frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_2 \parallel C}{R_1} = -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = v \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C} = v \cdot \frac{1}{1 + j\omega \tau} = v \cdot H_{TP}$$

mit einem RC-Tiefpass 1. Ordnung, wobei $\tau = R_2 C$

Äquivalentes Vorgehen wie bei Aufgabe 2A),

- die Phase ist wegen der invertierenden Grundschaltung um 180° verschoben,
- und außerdem ist für $R_1 \neq R_2$ der Wert von $H(j\omega)$ für $\omega \ll \omega_g$ nicht 0dB sondern

$$H_0 = 20 \lg \left| -\frac{R_2}{R_1} \right|$$

ii) Berechnung für $R = R_1 = R_2$ von $|H(j\omega)|$ und $\varphi(j\omega)$:

Zunächst allgemeine Nebenrechnung mit $a = \omega\tau$:

$$\left| -\frac{1}{1+j\omega\tau} \right| = \left| -\frac{1-ja}{(1+ja)(1-ja)} \right| = \left| \frac{-1+ja}{1+a^2} \right| = \sqrt{\frac{1^2}{(1+a^2)^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^2}} = \sqrt{\frac{1+a^2}{(1+a^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\Rightarrow |H(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+j\omega RC} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

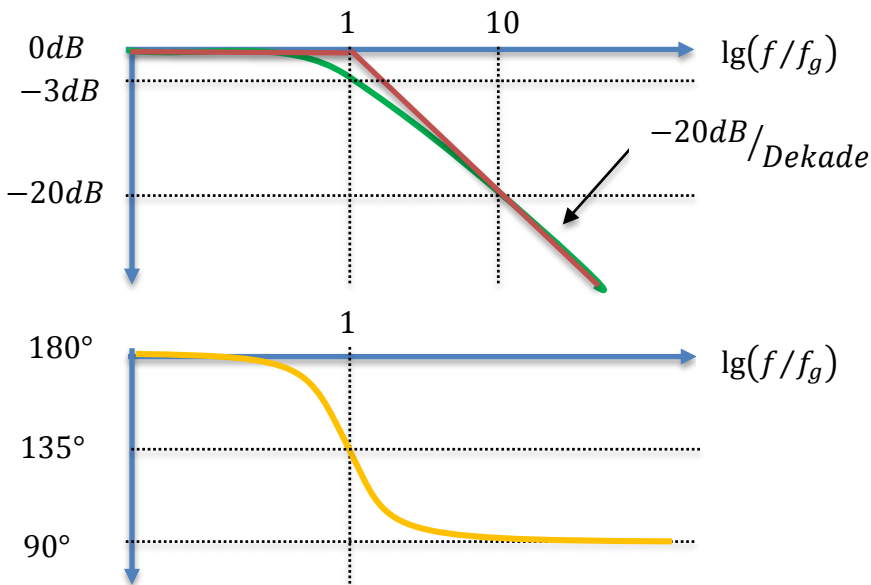
Mit Real- $\frac{-1}{1+a^2}$ und Imaginärteil $\frac{+a}{1+a^2}$ (siehe Nebenrechnung; Realteil negativ $\Rightarrow 180^\circ$ addieren):

$$\Rightarrow \varphi(j\omega) = \text{atan}\left(\frac{\text{Im}(H)}{\text{Re}(H)}\right) = \text{atan}(-\omega RC) + 180^\circ$$

$$\text{Und: } \omega = 0 \Rightarrow \varphi = 180^\circ; \omega = \omega_g = \frac{1}{RC} \Rightarrow \varphi = 135^\circ; \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi = 90^\circ;$$

Skizze Bode-Diagramm mit wesentlichen Elementen:

Idealer Verlauf (rot) / Verlauf mit 3dB Abfall (Grün) / Phase (orange)



Berechnung 3dB Abfalls (siehe 1A)

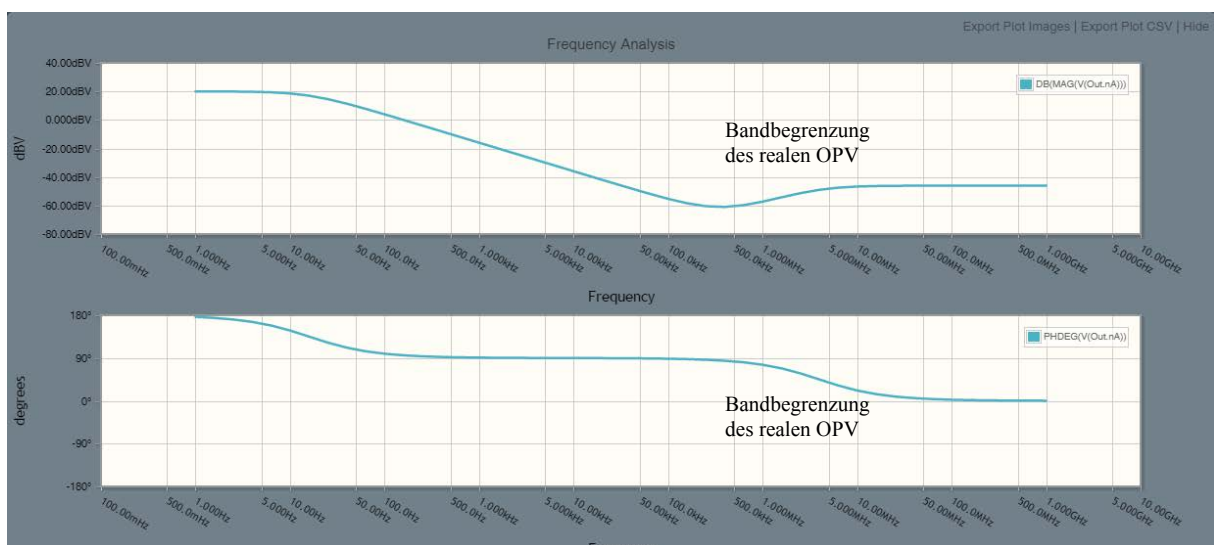
$$|H(j\omega_g)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_g RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \omega_g RC = 1 \Leftrightarrow \omega_g = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$$

$$\text{Außerdem gilt: } \omega_g = 2\pi f_g \Leftrightarrow f_g = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$$

z.B. für nachfolgende Simulation: $R_1 = 10k\Omega$; $R_2 = 100k\Omega$; $C = 100nF$

$$\Rightarrow v = -\frac{R_2}{R_1} = -10 \Rightarrow +20\text{dB}$$

$$\Rightarrow f_g = \frac{1}{2\pi R_2 C} = \frac{1}{2\pi \cdot 100k\Omega \cdot 100nF} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^5 \Omega \cdot 10^{-7} F} = 15,9\text{Hz}$$



Aufgabe 2C Ansatz und Rechnungen siehe Vorlesung!